Prova 1 ⇒ Matemática Discreta

Gabarito

Questão 1 ⇒

(a) (1,0)

$(\exists! x)(p(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)[(p(x) \wedge p(y)) \rightarrow x = y]$.

$\underline{\sim(\exists! x)(p(x))} \Leftrightarrow \underline{(\forall x)(\sim p(x)) \vee (\exists x)(\exists y)[p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]}$.

(b) (1,0)

$\sim(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-b| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\underline{(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})[0 < |x-b| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon]}$.

Questão 2 ⇒

(a) (1,0)

Teorema na forma recíproca: $T \rightarrow H$.

Teorema na forma Contrária: $\sim H \rightarrow \sim T$.

- Tabela-Verdade

H	T	$T \rightarrow H$	$\sim H$	$\sim T$	$\sim H \rightarrow \sim T$	$T \rightarrow H \Leftrightarrow \sim H \rightarrow \sim T$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Equivalentes — Tautologia

A bicondicional entre as proposições é uma tautologia. Logo, $T \rightarrow H \Leftrightarrow \sim H \rightarrow \sim T$.

• <u>Cálculo Proposicional</u>

$T \to H \Leftrightarrow \sim H \to \sim T$

$$T \to H \overset{4.}{\Leftrightarrow} \sim\sim(T \to H)$$

$$\overset{5.}{\Leftrightarrow} \sim(T \land \sim H)$$

$$\overset{15.}{\Leftrightarrow} \sim T \lor \sim\sim H$$

$$\overset{1.}{\Leftrightarrow} \sim\sim H \lor \sim T$$

$$\overset{16.}{\Leftrightarrow} \sim H \to \sim T$$

$\square$

---

(20) (1,25)

Dem.: ($\Rightarrow$) Por hipótese, n é um número inteiro par. Logo, $\exists k \in \mathbb{Z}$, tal que $n = 2k$. Então:

$$n - 1 = 2k - 1$$
$$= 2k - 2 + 1$$
$$= 2 \cdot \underbrace{(k-1)}_{k_1 \in \mathbb{Z}} + 1$$
$$= 2k_1 + 1, \; k_1 \in \mathbb{Z}$$

<u>Forma Direta</u>

$\therefore$ $n-1$ é ímpar.

($\Leftarrow$) Por hipótese, $n-1$ é um número inteiro ímpar. Logo, $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$, tal que $n - 1 = 2k_2 + 1$. Então:

$$n - 1 + 1 = 2k_2 + 1 + 1$$
$$n = 2k_2 + 2$$
$$n = 2 \cdot \underbrace{(k_2 + 1)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$$
$$n = 2 \cdot k_3, \; k_3 \in \mathbb{Z}$$

<u>Forma Direta</u>

$\therefore$ n é par. $\square$

(c) (1,25)

Dem.: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Por hipótese, $a|b$ e $a|c$. Então, $\exists\, m, n \in \mathbb{Z}$, tais que $b = a.m$ e $c = a.n$. Logo:

$$b + c = a.m + a.n$$

$$= a.\underbrace{(m+n)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Forma Direta

$$b + c = a.d, \quad d \in \mathbb{Z}$$

Desta forma, $a|(b+c)$.

$\square$

Questão 3 => (2,0)

(a) $A \cap B = B \cap A$

$$x \in (A \cap B) \overset{\text{Def. } \cap}{\iff} (\forall x)(x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$\overset{\text{1.}}{\iff} (\forall x)(x \in B) \wedge (x \in A)$$

$$\overset{\text{Def. } \cap}{\iff} x \in (B \cap A).$$

$\square$

(b) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C) \overset{\text{Def. Dif.}}{\iff} (\forall x)(x \in (A \cap B)) \wedge (x \notin (A \cap C))$$

$$\overset{\text{Def. } \cap}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \notin (A \cap C))$$

$$\overset{\text{neg.}}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (\sim x \in (A \cap C))$$

$$\overset{\text{Def. } \cap}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (\sim((x \in A) \wedge (x \in C)))$$

$$\overset{\text{neg.}}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin C))$$

$$\overset{\text{Dis.}}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin A)) \vee$$
$$((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))$$

$$\overset{\text{Com.}}{\iff} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \notin A) \wedge (x \in B)) \vee$$
$$((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)).$$

$x \in (A \cap B) - (A \cap C) \overset{9.}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (F \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))$ 4

$\overset{11.}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ F \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))$

$\overset{12.}{\Leftrightarrow} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))$

$\overset{\text{Assoc.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ ((x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)))$

$\overset{\text{Def. dif.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)((x \in A) \wedge (x \in (B - C)))$

$\overset{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} x \in A \cap (B - C)$

$\square$

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$x \in (A \cap B)^c \overset{\text{Def. Comp.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (x \in S) \wedge (x \notin (A \cap B))$

$\overset{\text{negação}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (x \in S) \wedge (\sim x \in (A \cap B))$

$\overset{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (x \in S) \wedge (\sim((x \in A) \wedge (x \in B)))$

$\overset{\text{negação}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (x \in S) \wedge ((x \notin A) \vee (x \notin B))$

$\overset{\text{Dist.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)((x \in S) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in S) \wedge (x \notin B))$

$\overset{\text{Def. Comp.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ (x \in A^c) \vee (x \in B^c)$

$\overset{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} x \in (A^c \cup B^c)$

$\square$

(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$x \in (A \cup (B \cap C)) \overset{\text{Def. } \cup}{\iff} (\forall x)((x \in A) \vee x \in (B \cap C))$$

$$\overset{\text{Def. } \cap}{\iff} (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B) \wedge (x \in C))$$

$$\overset{6.}{\iff} (\forall x)((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$$

$$\overset{\text{Def. } \cup}{\iff} (\forall x)(x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C))$$

$$\overset{\text{Def. } \cap}{\iff} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$\square$

Questão 4 $\Rightarrow$ (2,5)

1. Falsa. Essa afirmação se refere ao princípio da não-contradição.

2. Falsa. Por contra-exemplo, seja $a = 2$ e $b = -2$. Temos que $2 \mid -2$ e $-2 \mid 2$, mas $2 \neq -2$.

3. Verdadeira.

p	q	$\sim q$	$p \to q$	$p \wedge \sim q$	$p \to q \iff p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Contradição

4. Verdadeira. É uma sentença a qual é possível atribuir um valor lógico.

5. Falsa. $p \to (p \vee q) \overset{16.}{\iff} \sim p \vee (p \vee q) \overset{2.}{\iff} (\sim p \vee p) \vee q \overset{10.}{\iff} V \vee q \overset{8.}{\iff} V$

$\square$