$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ LD

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 6 \neq 0$ LI



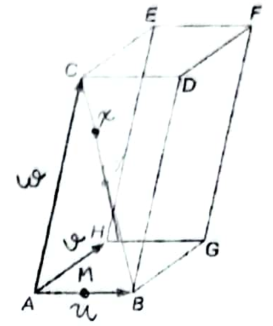
## Exercícios Propostos[1]

1. **(2,5 pt.)** Resolva os exercícios abaixo.

$AF = AC + CE + EF$
$= w + AH + AB$
$= w + v + u$

$AB + BC = AC$
$u + BC = w$
$BC = w - u$

(a) **(1,5 pt.)** Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{v}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$, utilize o paralelepípedo da figura ao lado para determinar os vetores $\vec{a} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AF}$ e $\vec{b} = 3\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{DH}$ em termos de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.




$(1, -1, 2) + (0, -3, 6)$
$(1, -4, 8)$

(b) **(1,0 pt.)** Em um triângulo $\Delta ABC$, seja $X$ um ponto no lado $BC$ tal que $3\overrightarrow{BX} = 5\overrightarrow{XC}$. Sendo $M$ o ponto médio do lado $AB$, escreva o vetor $\overrightarrow{MX}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$-2 - (2m - 1{,}5m^2) \cdot 3$
$-6 - (6m - 4{,}5m^2)$
$-6 - 6m + 4{,}5m^2$
$-12 - 12m + 9m^2$

2. **(2,0 pt.)** Considere os exercícios abaixo.

(a) **(1,0 pt.)** Fixada uma base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, determine os valores de $m$ para os quais os vetores $\vec{a} = 3\vec{i} + \left(2 - \dfrac{3m}{2}\right)\vec{j}$ e $\vec{b} = 3m\vec{i} - 2\vec{j}$ *não são paralelos*. $\to$ L. I

(b) **(1,0 pt.)** Sendo $\vec{u} = (1, 1 - m, 3)$, $\vec{v} = (-2, m, -1)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcule $m$ para que os vetores sejam L.D.

3. **(2,5 pt.)** Sejam $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (0, 1, -2)$ vetores expressos na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(a) **(0,5 pt.)** O vetor $\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$? Justifique.

(b) **(1,0 pt.)** Determine o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, onde $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{v} - 3\vec{w}$.

(c) **(1,0 pt.)** Escreva $\vec{t} = (2, 3, 6)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e determine os coeficientes dessa combinação.

4. **(3,0 pt.)** São dados os pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (2, 0, 0)$ e $D = (2, 0, -1)$ expressos na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1,0 pt.)** Mostre que os pontos $A$, $B$ e $C$ não são colineares e formam um *triângulo equilátero* em $\mathbb{R}^3$, e calcule a área do triângulo.

(b) **(1,0 pt.)** Determine o vetor projeção ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ na direção de $\overrightarrow{AC}$ (isto é, $\text{Proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$) e comente o resultado com base no item anterior.

(c) **(1,0 pt.)** Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ e determine sua altura em relação à face $ABD$.

$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$
$2 \cdot (-2 + 2) \quad - (2 - (-1))$
$2 \cdot 0 \quad - 3$

$4 - 2b - b + c = 3$
$-3b + c = -1$
$2b - 2c = 6$
$c = -1 + 3b$
$2b - 2(-1 + 3b) = 6$
$2b + 2 - 6b = 6$
$-4b = 4$
$b = -1$
$c = -1 + 3 \cdot -1$
$= -1 - 3$
$= -4$

[1]Coloque o nome completo nas folhas de prova e escreva o resultado final das questões à caneta. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. Não é permitido o uso de quaisquer equipamentos eletrônicos. Data da Avaliação: 15/05/2024

8,7

(1) a) $AB + BC = AC$

$u + BC = w$

$BC = w - u$

$AF = AB + BG + GF$

$= u + v + w$

$CF = CD + DF$

$CF = AB + AH$

$= u + v$

$BE = BD + DC + CE$

$= AC - CD + AH$

$= w - AB + v$

$= w - u + v$

$DH = DB + BA + AH$

$= -BD + -AB + v$

$= -w - u + v$

$= v - w - u$

$a = 2(w - u) - (u + v + w)$

$= 2w - 2u - u - v - w$

$= w - 3u - v$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= w - 3u - v \\ b &= 4u + 2v + 3w \end{aligned}}$$

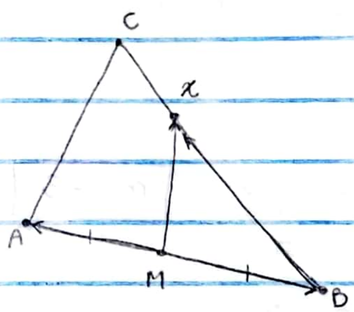
C 1,5

$b = 3(u+v) + (w - u + v) - 2(v - w - u)$

$= 3u + 3v + w - u + v - 2v + 2w + 2u$

$= 4u + 2v + 3w$

b)




$3BX = 5XC \rightarrow \frac{3BX}{5} = XC$

$BX = BM + MX$

$BX = \frac{-AB}{2} + MX$

$MX = MA + AC + CX$

$= \frac{-AB}{2} + AC - \frac{3BX}{5}$

$\frac{BA}{2} = MA \qquad BM = \frac{BA}{2}$

$\frac{-AB}{2} = MA \qquad BM = \frac{-AB}{2}$

$= \frac{-AB}{2} + AC - \frac{3 \cdot \left(\frac{-AB}{2} + MX\right)}{5}$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{\frac{3AB}{2} - 3MX}{5}$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{\frac{3AB - 6MX}{2}}{5} = \frac{-AB}{2} + AC + \frac{3AB - 6MX}{2} \cdot \frac{1}{5}$

$$\boxed{MX = \frac{-AB + 5AC}{2}}$$

$= \frac{-AB}{2} + AC + \frac{3AB - 6MX}{10}$

0,5

$= \frac{-5AB + 10AC + 3AB - 6MX}{10}$

$10MX + 6MX = -2AB + 10AC$

$4MX = -2AB + 10AC$

$MX = \frac{-AB + 5AC}{2}$

a)

$$② \begin{vmatrix} 3 & 2-\frac{3m}{2} \\ 3m & -2 \end{vmatrix} = -6 - \left(3m \cdot \frac{4-3m}{2}\right)$$

$$= -6 - \frac{(12m - 9m^2)}{2}$$

$$= \frac{-12 - 12m + 9m^2}{2}$$

$9m^2 - 12m - 12 \neq 0$

$\Delta = 144 - 4 \cdot 9 \cdot -12$

$\Delta = 144 - 36 \cdot -12$

$= 144 + 432$

$= 576$

1,0

$$m = \frac{12 \pm \sqrt{576}}{18}$$

$$m_1 = \frac{12 + \sqrt{576}}{18} \rightarrow \frac{12+24}{18} = \frac{36}{18} = 2$$

$$m_2 = \frac{12 - \sqrt{576}}{18} \rightarrow \frac{12-24}{18} = \frac{-12}{18} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

$\boxed{\text{para os valores no conjunto } \mathbb{R}, \text{ exceto } \cancel{\frac{12 \pm \sqrt{576}}{18}}\ 2 \text{ e } -\frac{2}{3}}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-m & 3 \\ -2 & m & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-m & 3 \\ -1 & m+2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ -1 & m+2 \end{vmatrix}$$

$L_2 = L_2 + L_1$

$= 3 \cdot \left(-2 - (m+2)\right) + m+2 - (-1+m)$

$= 3 \cdot (-2 - m - 2) + m + 2 + 1 - m$

$= 3 \cdot (-m - 4) + 3$

$= -3m - 12 + 3$

$= -3m - 9$

$-3m - 9 = 0$

$-3m = 9$

$3m = -9$

$m = -3$

$\boxed{m = -3}$

1,0

③ a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \quad L.I$$

$L_2 = L_2 + L_1$

0,5

$\boxed{\text{Não, pois } u, v \text{ e } w \text{ formam uma base, e portanto, são linearmente independentes}}$

b) $a = (1,2,0) + 2 \cdot (1,-1,2)$

$= (1,2,0) + (2,-2,4)$

$= (3,0,4)$

$b = (1,-1,2) - 3(0,1,-2)$

$= (1,-1,2) - (0,3,-6)$

$= (1,-4,8)$

$a \cdot b = 3 + 0 + 32$

$= 35$

1,0

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{35}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1+16+64}} = \frac{35}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{81}} = \frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{5}_{1} \cdot 9} = \frac{7}{9}$$

$\boxed{\arccos\left(\frac{7}{9}\right) = \theta}$

$2 \cdot -1 - 2 \cdot -1$ $\quad 2 \cdot 3$
$-2 + 2$
$0$

c) $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = t$

$a(1,2,0) + b(1,-1,2) + c \cdot (0,1,-2) = (2,3,6)$

$2+1=3$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b + c = 3 \\ 2b - 2c = 6 \end{cases}$$

$\bullet\ a = 2-b$
$2(2-b) - b + c = 3$
$4 - 2b - b + c = 3$
$4 - 3b + c = 3$
$\bullet\ -3b + c = -1$
$c = -1 + 3b$
$c = -1 - 3 = -4$

$\bullet\ b - c = 3$
$b - (-1+3b) = 3$
$b + 1 - 3b = 3$
$-2b = 2$
$b = -1$

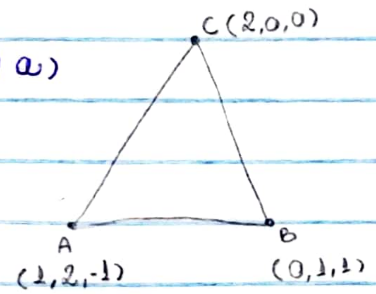
coef v $\quad$ coef u

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{array}}$$

coef w

1,0

④ a)




$\frac{1}{2}$

angulo entre AC e AB → 60°

$\cos 60° = \frac{AC \cdot AB}{\|AC\| \cdot \|AB\|} = \frac{(1,-2,1) \cdot (-1,-1,2)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1+4}}$

$= \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

angulo entre BA e BC → 60°

$\frac{1}{2} = \frac{BA \cdot BC}{\|BA\| \cdot \|BC\|} = \frac{(1,1,-2) \cdot (2,-1,-1)}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{2-1+2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2}$

todos os angulos formam 60°, a norma é a mesma

área: $\frac{\|AB\| \cdot \|AC\|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

0,7

b) $proj_{AC}^{AB} = \frac{AC \cdot AB}{\|AC\|^2} \cdot AC = \frac{3}{(\sqrt{6})^2} \cdot (1,-2,1) = \frac{1}{2} \cdot (1,-2,1) = \boxed{\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)}$

1,0

c) $\frac{1}{6} \cdot |AB \cdot (AC \times AD)|$

$(-1,-1,2)$ $\quad (1,-2,1)$ $\quad (1,-2,0)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2-(-1))$$

$= -(2+1)$

$= -3$

$\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{1}{2}}$

0,5