8,75

Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG

Disciplina: Cálculo Numérico Turma: BCC Período: 2023/1

Professor Anderson José de Oliveira Data: 12/07/2023

Aluno(a) ______________ Matríc

ATENÇÃO: Respostas sem justificativa serão desconsideradas.

Todas as folhas entregues, devem ser devolvidas.

Não será permitido o uso de celular, somente calculadora científica.

PROVA P3 - CÁLCULO NUMÉRICO

1. Considere a integral:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

2,0 (a) (2,0) Estime I pela Regra de Simpson, usando $h = 0,25$.

2,0 (b) (2,0) Estime I por Quadratura Gaussiana com 2 pontos.

(c) Sabendo que o valor exato de I (usando 5 casas decimais) é $0,74682$, pede-se:

1,0 (c_1) (1,0) compare o valor exato com as estimativas obtidas em (a) e (b).

0,25 (c_2) (1,0) quantos pontos seriam necessários para que a Regra dos Trapézios obtivesse a mesma precisão que a estimativa obtida para I em (b)?

Critério: Use cinco casas decimais após a vírgula, com arredondamento.

2. O número de bactérias, por unidade de volume, existente em uma cultura após x horas, é dado na tabela a seguir:

n° horas	0	1	2	3	4	5	6
n° bactérias	32	47	65	92	132	190	275

2,0 (a) (2,0) Ajuste os dados da tabela anterior à curva $y = \alpha e^{bx}$ pelo método dos quadrados mínimos.

0,5 (b) (1,0) Quantas horas seriam necessárias para que o número de bactérias por unidade de volume ultrapassasse 2000?

Critério: Use quatro casas decimais após a vírgula, com arredondamento.

0,0 **3.** (1,0) Para ajustar os pontos de uma tabela com n pontos a uma função polinomial de grau m, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$, onde $m \leq n-1$, calculamos a soma dos quadrados das distâncias de y_i à $P(x_i)$, dada por $q = \sum(y_i - P(x_i))^2$ dependendo de $m+1$ parâmetros $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Para minimizar essa função, as $m+1$ condições $\frac{\partial q}{\partial a_i} = 0 \forall i = 0, 1, \ldots, m$ satisfeitas fornecem um sistema de $m+1$ equações normais. Obtenha um sistema de equações normais para uma função polinomial quadrática.

1

a)

$\Delta x = 0{,}25 \quad n = 4$

$$S_4 = \frac{0{,}25}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 4f(0{,}75) + f(1)\right]$$

$$\frac{0{,}25}{3}\left[1 + 3{,}75765 + 1{,}55760 + 2{,}27913 + 0{,}36788\right]$$

$$\frac{0{,}25}{3}\cdot\left[8{,}96226\right] = 0{,}08333\cdot\left[8{,}96226\right]$$

$$= 0{,}74683$$

b)

$$A = F\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

normalizar $[0,1] \rightarrow [-1,1]$

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$$

$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ → derivando o t sobra-se somente 1/2

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \qquad dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2} \frac{dt}{2}$$

$$A = F\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$A = e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\right)^2} + e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = e^{-(-0,28868+\frac{1}{2})^2} + e^{-(0,28868+\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = e^{-(0,21132)^2} + e^{-(0,78868)^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = e^{-0,04466} + e^{-0,62202} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = (0,95632) + (0,53686) \cdot 1/2$$

$$A = 1,49318 \cdot 1/2$$

$$A = 0,74659 \;//$$

6 a)

Valor exato $0,74682$

estimativa Simpson $= |0,74682 - 0,74683| = 0,00001$ //

Quadratura $= |0,74682 - 0,74659| = 0,00023$ //

0,7358 0,00264

0,0005

$\left| \begin{matrix} -2x\, e^{-x^2} & -2 \\ -2x\, e^{-x^2} \end{matrix} \right|$ -2 $-2x$ e^{-x^2}

$-2x^2$

c2)

$f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$|E_T| \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2} \leq 0,00023$

$f''(x) = -2(2e^{-x^2}x^2 + e^{-x^2})$

k=2

$k = 0,7358$

$\frac{0,7358\,(1)^3}{12n^2} \leq 0,00023$

$0,7358 \leq 0,00023 \cdot 12n^2$

$0,7358 \leq 0,00276\, n^2$

$\frac{0,7358}{0,00276} \leq n^2$

$16,32771 \leq n$

$\sqrt{266,59420} \leq \sqrt{n^2}$

$n = 17$

(2)

a) $n = 7$ $\quad x_i = 21$

$y = \alpha e^{bx}$

$\ln(y) = \ln(\alpha e^{bx})$

$\ln(y) = \ln(\alpha) + \ln(e^{bx})$

$\ln(y) = \ln(\alpha) + bx$

$Y = a + bX$

Y	x^2	X·Y
3,4657	0	0
3,8502	1	3,8502
4,1744	4	8,3488
4,5218	9	13,5654
4,8828	16	19,5312
5,2470	25	26,2350
5,6168	36	33,7008
31,7587	91	105,2314

$$\begin{cases} 7a + 21b = 31,7587 \\ 21a + 91b = 105,2314 \end{cases}$$

$L1 \leftarrow L1 \cdot (-3)$

$-21a - 63b = -95,2761$

$21a + 91b = 105,2314$

$L2 \leftarrow L2 + L1$

$-21a - 63b = -95,2761$

$0a + 28b = 9,9553$ $\quad b = \dfrac{9,9553}{28}$ $\quad b = 0,3555$

$7a + 21(0,3555) = 31,7587$

$7a + 7,4655 = 31,7587$

$7a = 31,7587 - 7,4655$

$7a = 24,2932$

$a = 24,2932/7$ $\quad a = 3,4705$

$Y = 3,4705 + 0,3555x$ $\quad a = 3,4705$

$$\boxed{y = 32,1528\, e^{0,3555x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(\alpha) &= a \\ \alpha &= e^{a} \\ \alpha &= 32,1528 \end{aligned}}$$

(2)

b) $y = 32,1528\, e^{0,3555x}$

1200? No problema foi solicitado 2000!

$1200 = 32,1528\, e^{0,3555x}$

$\ln(1200) = \ln(32,1528) + \ln(e^{0,3555x})$

$\ln(1200) = \ln(32,1528) + 0,3555x$

$7,0901 = 3,4705 + 0,3555x$

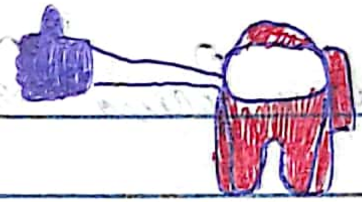
$0,3555x = 7,0901 - 3,4705$

? $0,3555x = 3,6196$ $\quad x = \dfrac{3,6196}{0,3555}$ $\quad x = 10,1817$

C

seriam necessárias no mínimo
10,1817 horas para ultrapassar
2000 bactérias.

3



?