UNIVERSIDADE FEDERAL ALFENAS (UNIFAL)
Bacharelado em Ciência da Computação

Disciplina	Método de realização	Data da prova
DCE529 - Algoritmos e Estrutura de Dados III	Presencial	10/03/2023 às 08h00

Professor
Iago Augusto de Carvalho (iago.carvalho@unifal-mg.edu.br)

Prova 03

Exercício 1 (30%)

Resolva as seguintes equações de recorrência utilizando o teorema mestre. Apresente qual caso do teorema mestre foi utilizado, os valores de a, b, $f(n)$, e dê, ao final, a complexidade do algoritmo

a) $T(n) = T\left(\frac{7n}{10}\right) + n$

b) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

c) $T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

Exercício 2 (30 %)

Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso seja falsa, justifique

a) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$.

b) Se $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$, então $f(n) = \Theta(g(n))$.

c) $n - 1000\log n = \mathcal{O}(n)$.

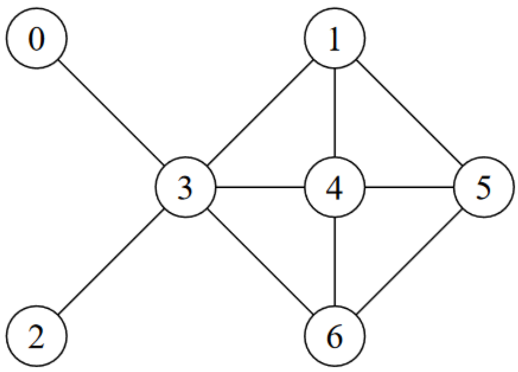
d) Se $f_1(n) = \mathcal{O}(g_1(n))$ e $f_2(n) = \mathcal{O}(g_2(n))$, então $f_1(n)f_2(n) = \mathcal{O}(|g_1(n)| + |g_2(n)|)$.

Exercício 3 (40%)

Seja o problema do *CLIQUE* como definido em aula. Ou seja, dado um grafo $G = (V, E)$, um clique $V' \subseteq V$ é tal que $i, j \in V' \iff (i, j) \in E$ e que V' é um subgrafo completo de G e que todo par de vértices em V' é adjacente.

Além disso, seja o problema do *CONJUNTO INDEPENDENTE* também como definido em aula. Ou seja, dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto independente $V' \subseteq V$ é tal que $i, j \in V' \iff (i, j) \notin E$ e que V' é um grafo totalmente desconectado e que todo par de vértices em V' não é adjacente.

Para ilustrar ambos os problemas, veja a figura abaixo. Nesta figura, temos que a resolução do *CLIQUE* é o conjunto $V' = \{1, 3, 4\}$. Além disso, a resolução do *CONJUNTO INDEPENDENTE* é o conjunto $V' = \{0, 1, 2, 6\}$.



a) Quais são os passos para mostrar que um problema é NP-Completo?

b) Mostre que o problema *CONJUNTO INDEPENDENTE* está em NP.

c) Sabendo que o problema *CLIQUE* é NP-Completo, mostre que o problema *CONJUNTO INDEPENDENTE* também é NP-Completo

Gabarito

Exercício 1

a) $a = 1, b = \frac{10}{7}, f(n) = n$. Além disso, temos que $\log_b a = \log_{10/7} 1 = 0$. Podemos notar que $f(n)$ é assintoticamente superior a $n^{\log_b a} = n^0 = 1$, assim partindo para o caso 3 do teorema mestre. Assumindo $\epsilon = 1$, temos que $n = \Omega(n^{0+\epsilon}) = \Omega(n^{0+1}) = \Omega(n)$. Por último, temos que verificar a condição de regularidade $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$. Fazendo as substituições, temos que $\frac{7}{10}n \leq cn$. Podemos escolher um valor $c = \frac{7}{10}$ menor do que 1 que torna esta equação verdade e torna válido o caso 3 do teorema mestre. Assim, pode-se afirmar que $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$.

b) $a = 2, b = 2, f(n) = 1$. Além disso, temos que $\log_b a = \log_2 2 = 1$. Podemos notar que $f(n)$ é assintoticamente inferior a $n^{\log_b a} = n^1 = n$, assim partindo para o caso 1 do teorema mestre. Assumindo $\epsilon = 1$, temos que $1 = \mathcal{O}(n^{1-\epsilon}) = \mathcal{O}(n^{1-1}) = \mathcal{O}(1)$. Desta forma, pode-se afirmar que $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$.

c) $a = 16, b = 4, f(n) = n^2$. Além disso, temos que $\log_b a = \log_4 16 = 2$. Podemos notar que $f(n^2) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n^2)$, o que satisfaz a condição do caso 2 do teorema mestre. Portanto, pode-se afirmar que $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a} \log n) = \mathcal{O}(n^2 \log n)$.

Exercício 2

a) Falso. Neste caso, temos que $g(n)$ é um limitante superior para a taxa de crescimento de $f(n)$. Por consequência, $f(n)$ é um limitante inferior para a taxa de crescimento de $f(n)$. O correto seria afirmar que $g(n) = \Omega(f(n))$.

b) Verdadeiro.

c) Verdadeiro ($c = 1$ e qualquer valor $n_0 > 0$).

d) Falso. Como é realizado um produto entre $f_1(n)$ e $f_2(n)$, temos que multiplicar também as duas funções g. Assim, temos que $f_1(n)f_2(n) = \mathcal{O}(g_1(n)g_2(n))$.

Exercício 3

a) São dois passos. O primeiro passo é mostrar que o problema está em NP. Já o segundo passo é realizar uma redução de um problema já sabidamente NP-Completo para o problema que você quer provar a NP-Completude. Esta redução tem que ser feita em tempo polinomial. Além disso, deve-se também apresentar uma transformação polinomial que transforma a solução obtida por um algoritmo que resolve o problema que você quer provar ser NP-Completo em uma solução do problema NP-Completo.

b) Vamos desenvolver um algoritmo não-determinístico que resolve o problema *CONJUNTO INDEPENDENTE* em tempo polinomial. Seja $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o conjunto de vértices do problema *CONJUNTO INDEPENDENTE*. Além disso, seja *escolhe* uma função não-determinística polinomial que possui dois resultados: ela retorna *sim* caso um vértice faça parte da solução do problema e retorna *não* caso o vértice não faça parte da solução do problema. O algoritmo pode ser descrito como o pseudo-código abaixo

for $(v_i \in V)$

  $escolhe(v_i)$

c) Devemos seguir os passos descritos na questão a). Uma transformação polinomial de *CLIQUE* para *CONJUNTO INDEPENDENTE* pode ser realizada simplesmente alterando as arestas do grafo de tal forma que, toda aresta existente em E é retirada e inserimos uma aresta entre todo par de vértices que não eram anteriormente ligados pelas arestas em E. O resultado do *CONJUNTO INDEPENDENTE* nesta instância construída é exatamente a resposta do *CLIQUE*, não sendo necessária nenhuma transformação.